

Comparative Evaluation of Predictive Accuracy of the Linear Black–Scholes Model and Nonlinear Heston and Quantum Schrödinger Models in Option Pricing in the Tehran Stock Exchange

1. Vahide Khajepour[✉]: Department of Financial Management, Ya.C., Islamic Azad University, Yazd, Iran

2. Gholamreza Askarzadeh Dareh^{✉*}: Department of Financial Management, Ya.C., Islamic Azad University, Yazd, Iran. Email: gr.askarzadeh@iau.ac.ir (Corresponding Author)

3. Hamid Khajeh Mahmoudabadi[✉]: Department of Financial Management, Ya.C., Islamic Azad University, Yazd, Iran

4. Seyed Yahya Abtahi[✉]: Department of Financial Management, Ya.C., Islamic Azad University, Yazd, Iran

Article history



Received: 25 June 2025

Revised: 08 November 2025

Accepted: 16 November 2025

Initial Publish: 19 June 2026

Final Publish: 23 August 2026

Abstract:

This study aims to comparatively evaluate the predictive accuracy of three option pricing models—Black–Scholes, Heston, and Quantum Schrödinger—to determine the most reliable valuation framework for the volatile conditions of Iran’s derivatives market. This applied quantitative research employed real data from European call options traded on the Tehran Stock Exchange between 2016 and 2022. The Black–Scholes, Heston, and Schrödinger models were implemented and calibrated in Python 3.9 using finite difference and fourth-order Runge–Kutta numerical schemes. Performance accuracy was assessed through RMSE, MAE, and R^2 indices, and sensitivity to risk-free interest rate variations was examined. The results revealed that the quantum Schrödinger model achieved the lowest prediction error (RMSE = 26.968) and the highest coefficient of determination ($R^2 = 0.6879$), outperforming both the Heston model (RMSE = 65.029, $R^2 = 0.6537$) and the Black–Scholes model (RMSE = 767.292, $R^2 = 0.5091$). Nonlinear adaptive models demonstrated significantly superior accuracy in replicating the dynamic behavior of Iran’s volatile derivatives market compared to traditional linear frameworks. The study concludes that the nonlinear quantum Schrödinger model is the most accurate and robust framework for option pricing in the Tehran Stock Exchange. Its application can enhance risk management precision, improve market transparency, and optimize derivative valuation strategies in emerging financial markets.

Keywords: Option pricing; Black–Scholes model; Heston model; Quantum Schrödinger model; predictive accuracy; Iranian derivatives market

Citation: Khajepour, V., Askarzadeh Dareh, G., Khajeh Mahmoudabadi, H., & Abtahi, S. Y. (2026). Comparative Evaluation of Predictive Accuracy of the Linear Black–Scholes Model and Nonlinear Heston and Quantum Schrödinger Models in Option Pricing in the Tehran Stock Exchange. *Accounting, Finance and Computational Intelligence*, 4(3), 1-19.



Copyright: © 2026 by the authors. Published under the terms and conditions of Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0) License.

Extended Abstract**Introduction**

Accurate option pricing models constitute the foundation of modern financial engineering and play a pivotal role in market stability, risk management, and investment decision-making. In emerging markets such as the Tehran Stock Exchange (TSE), the inherent volatility, illiquidity, and informational asymmetry challenge the assumptions of classical linear frameworks. The Black–Scholes model, despite its historical significance, has been repeatedly criticized for its inability to account for real-world phenomena such as volatility clustering, return skewness, and volatility smiles (Askarzadeh & Nasiri, 2023; Nabavi Chashmi & Abdollahi, 2018). As a result, financial researchers have increasingly turned to nonlinear and adaptive models that integrate stochastic volatility, memory effects, and even quantum mechanical principles to capture the true dynamics of option prices.

The classical Black–Scholes model assumes constant volatility and normally distributed returns under a perfectly efficient market environment. However, empirical evidence from emerging economies—especially Iran—has shown that such assumptions rarely hold. In these markets, macroeconomic shocks, policy changes, and behavioral biases create conditions where price dynamics deviate substantially from Gaussian structures (Askarzadeh & Nasiri, 2023). In this context, the linear framework tends to systematically overprice or underprice options, reducing its predictive reliability. Consequently, stochastic volatility models such as Heston’s have been developed to address these limitations by allowing volatility to evolve as a random process correlated with the underlying asset’s returns (Khalili Iraqi, 2016).

The Heston model represents an important evolution from the Black–Scholes model, providing flexibility to account for volatility dynamics and market imperfections. Nevertheless, stochastic models remain constrained by assumptions of Markovian processes and lack the capacity to capture long-term dependencies, feedback loops, and nonlinear interactions observed in real markets. To overcome these challenges, researchers have drawn inspiration from quantum mechanics, particularly from the Schrödinger equation, to develop quantum-based option pricing models (Vukovic, 2015). The nonlinear quantum model views market dynamics as wave-like phenomena, where the probability amplitudes describe the evolution of prices over time. This approach enables the representation of both deterministic and probabilistic components of financial behavior, thus bridging the gap between theoretical pricing and real-world fluctuations (Wroblewski, 2017).

Recent studies have further developed this perspective by formulating the quantum Black–Scholes equation and its nonlinear Schrödinger variant (Wroblewski & Myśliński, 2022, 2023). These models incorporate adaptive nonlinear parameters that respond to discrepancies between model-predicted and market-observed prices, thereby self-correcting in volatile conditions. The inclusion of a nonlinear coupling coefficient (β) allows for adjustment in reaction to market imbalances: when the model overestimates market values, β becomes positive, and when it underestimates, β turns negative. This adaptability grants quantum models a major advantage over static frameworks.

Moreover, the quantum perspective aligns conceptually with advances in artificial intelligence (AI) and machine learning. Hybrid frameworks such as quantum neural networks employ principles of superposition and entanglement to learn complex, non-Gaussian relationships within financial data (Paquet & Soleyman, 2022). These models have been shown to outperform conventional predictive algorithms by better approximating multi-dimensional, chaotic market behavior. Similarly, quantum-inspired AI systems have demonstrated exceptional performance in high-frequency trading environments, where real-time adaptability and nonlinearity are crucial (Vandanapu et al., 2024). Such developments indicate that quantum mechanics not

only provides a novel mathematical foundation but also serves as an emerging computational paradigm for financial prediction (Pasupuleti, 2025).

Parallel to computational progress, recent behavioral finance research suggests that quantum thinking—the cognitive ability to tolerate uncertainty and ambiguity—enhances decision-making in volatile environments (Wang & Li, 2024). This supports the idea that financial models based on quantum probability structures may better reflect real human decision processes, which are inherently probabilistic and context-dependent rather than deterministic. The convergence of quantum theory, stochastic mathematics, and behavioral economics thus signals a paradigm shift toward more realistic and responsive frameworks for financial modeling.

From a mathematical standpoint, the nonlinear Schrödinger approach benefits from advances in applied stochastic analysis, which provides rigorous tools for solving complex, time-dependent financial equations (Weinan et al., 2019). This integration allows quantum models to describe systems that exhibit randomness and determinism simultaneously, closely mirroring market behavior. Numerical implementations of these models, particularly through the Runge–Kutta fourth-order method, have proven both stable and accurate for solving financial wave equations (Kartono et al., 2020).

Empirical and comparative studies in Iran underscore the importance of testing such advanced models in local contexts. For instance, while (Askarzadeh & Nasiri, 2023) compared the Black–Scholes and binomial tree models and confirmed their structural inadequacy in the Iranian options market, (Nabavi Chashmi & Abdollahi, 2018) found that returns from European, American, and Asian options on the TSE exhibit distinct volatility patterns, implying that more flexible pricing frameworks are needed. Against this backdrop, the present research was designed to evaluate the predictive accuracy of three major paradigms—linear (Black–Scholes), stochastic (Heston), and nonlinear quantum (Schrödinger)—under identical computational and empirical conditions.

The study thus contributes to financial theory and practice by systematically comparing the three generations of option pricing models within the same empirical framework. It hypothesizes that the nonlinear quantum Schrödinger model, due to its adaptive, wave-based, and feedback-sensitive nature, will outperform the classical and stochastic counterparts in predicting fair option values in the Tehran Stock Exchange.

Methods and Materials

This research adopted a quantitative, comparative, and applied design. Real data from 30 actively traded European call option contracts on the Tehran Stock Exchange were collected from 2016 to 2022. Each contract included at least 70 trading days of valid price observations. The variables included the underlying asset price, strike price, risk-free interest rate, time to maturity, and implied volatility.

Three models were implemented under identical computational conditions:

1. The Black–Scholes model, assuming constant volatility and log-normal asset returns.
2. The Heston model, incorporating stochastic volatility through a correlated variance process.
3. The nonlinear Schrödinger quantum model, representing option price dynamics as a financial wave function evolving under a nonlinear potential term.

Numerical simulation and calibration were conducted in Python 3.9, using libraries such as *NumPy*, *SciPy*, and *Matplotlib*. The fourth-order Runge–Kutta method was employed for time integration, while a central finite-difference scheme

approximated spatial derivatives. Calibration of the nonlinear coupling parameter β in the Schrödinger model utilized a binary search algorithm to minimize the Root Mean Square Error (RMSE) between predicted and market-observed prices.

Model performance was evaluated using RMSE, Mean Absolute Error (MAE), and the coefficient of determination (R^2). Sensitivity analyses were also performed by systematically varying the risk-free interest rate to assess each model's stability under changing macroeconomic conditions.

Findings

Descriptive statistics revealed that the underlying asset prices exhibited substantial dispersion, consistent with the structural heterogeneity of the Iranian market. The average remaining maturity of the analyzed options was approximately 0.11 years (roughly 41 days), indicating the short-term nature of most contracts. The average risk-free rate of 28.9% reflected the inflationary environment and monetary fluctuations during the study period.

In terms of predictive accuracy, the quantum Schrödinger model achieved the best overall performance, with RMSE = 26.968, MAE = 21.53, and $R^2 = 0.6879$. The Heston model ranked second, producing RMSE = 65.029 and $R^2 = 0.6537$, while the Black–Scholes model displayed the weakest results, with RMSE = 767.292 and $R^2 = 0.5091$. These differences were statistically significant according to *t*-tests and ANOVA results at the 0.01 level.

Visual analysis of the pricing surfaces confirmed these findings. The Black–Scholes model generated smooth and nearly planar surfaces, reflecting its inability to capture local volatility spikes. The Heston model introduced moderate curvature due to stochastic variance, while the Schrödinger model displayed complex, wave-like undulations that closely mirrored actual market fluctuations. Sensitivity analysis showed that the quantum model maintained stability even under significant changes in the interest rate, whereas the Black–Scholes model's error increased sharply under similar conditions.

Overall, the results indicated that the Schrödinger model not only minimized pricing errors but also exhibited greater numerical stability and adaptability under turbulent market conditions.

Discussion and Conclusion

The empirical evidence strongly supports the hypothesis that nonlinear, quantum-based approaches offer superior predictive accuracy in option pricing, particularly within emerging and volatile markets. The poor performance of the Black–Scholes model underscores the limitations of assuming constant volatility and normal return distributions, assumptions that are clearly violated in real market data. The model's tendency to overprice or underprice options is consistent with its theoretical rigidity and the absence of feedback mechanisms to adjust for dynamic fluctuations.

The intermediate performance of the Heston model validates the contribution of stochastic volatility modeling but also highlights its boundaries. While the model successfully captures time-dependent variance, it still relies on a parametric structure that cannot account for the multi-scale, feedback-driven nature of financial dynamics. Its partial improvement over the Black–Scholes framework confirms the importance of introducing randomness, yet it remains insufficient for fully explaining nonlinear dependencies in the Iranian market.

In contrast, the superior results of the Schrödinger quantum model illustrate the advantage of embedding financial processes within a nonlinear and adaptive system. The inclusion of the β term effectively transforms the pricing equation into a self-correcting mechanism, capable of responding to evolving market conditions. By representing price behavior as a wave function subject to potential interactions, the model captures both the local (short-term) and global (systemic) components

of volatility. This duality mirrors the interplay between individual trader decisions and aggregate market outcomes, thus achieving a level of realism absent in classical frameworks.

The results also align with contemporary theoretical and computational advancements. The convergence of financial modeling with quantum dynamics and artificial intelligence—demonstrated by hybrid systems such as quantum neural networks—signals a new direction in predictive finance. These systems leverage quantum superposition and entanglement to analyze multi-dimensional data spaces, achieving higher efficiency and adaptability. Consequently, quantum-based financial models, including the Schrödinger framework, can be seen as precursors to broader quantum-fintech integrations that will define the next generation of risk analysis and portfolio management tools.

From a practical perspective, the study suggests that quantum nonlinear models could serve as robust alternatives for derivative valuation in markets characterized by uncertainty and instability. Their adaptability to fluctuations in interest rates and volatility makes them particularly suitable for policy-sensitive economies like Iran. Furthermore, by improving pricing precision, such models can contribute to reducing arbitrage opportunities, enhancing transparency, and fostering investor confidence.

In conclusion, the findings of this study demonstrate that the nonlinear Schrödinger quantum model provides the most accurate, stable, and adaptive framework for option pricing in the Tehran Stock Exchange. This approach not only bridges theoretical gaps between physics and finance but also offers practical benefits for emerging markets facing structural inefficiencies. Future research should explore the integration of quantum models with deep learning algorithms and macroeconomic variables, thereby advancing the frontier of quantum-inspired financial analytics.

Authors' Contributions

Authors equally contributed to this article.

Acknowledgments

Authors thank all participants who participate in this study.

Declaration of Interest

The authors report no conflict of interest.

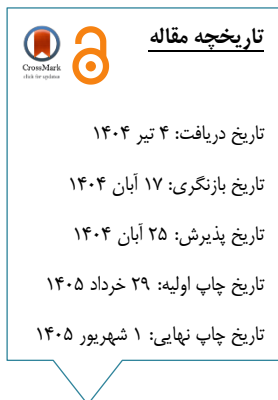
Funding

According to the authors, this article has no financial support.

Ethical Considerations

All procedures performed in this study were under the ethical standards.

ارزیابی تطبیقی دقت پیش‌بینی مدل خطی بلک-شولز و مدل‌های غیرخطی هستون و شرودینگر کوانتوم‌محور در ارزش‌گذاری قراردادهای اختیار معامله در بورس اوراق بهادار تهران



۱. وحیده خواجه پور*^{ID}: گروه مدیریت مالی، واحد یزد، دانشگاه آزاد اسلامی، یزد، ایران

۲. غلام رضا عسکرزاده دره*^{ID}: گروه مدیریت مالی، واحد یزد، دانشگاه آزاد اسلامی، یزد، ایران. ایمیل:

gr.askarzadeh@iau.ac.ir (نویسنده مسئول)

۳. حمید خواجه محمود آبادی*^{ID}: گروه مدیریت مالی، واحد یزد، دانشگاه آزاد اسلامی، یزد، ایران

۴. سید یحیی ابطحی*^{ID}: گروه اقتصاد، واحد یزد، دانشگاه آزاد اسلامی، یزد، ایران

چکیده

این پژوهش با هدف ارزیابی تطبیقی دقت پیش‌بینی سه مدل قیمت‌گذاری اختیار معامله شامل مدل خطی بلک-شولز، مدل نوسان تصادفی هستون و مدل کوانتومی غیرخطی شرودینگر در بازار مشتقه ایران انجام شده است تا مناسب‌ترین چارچوب ارزش‌گذاری برای شرایط پرنوسان بورس اوراق بهادار تهران شناسایی شود. این تحقیق از نوع کاربردی و کمی است. داده‌های واقعی قراردادهای اختیار خرید اروپایی طی دوره شش‌ساله ۱۳۹۵ تا ۱۴۰۱ از سامانه شرکت مدیریت فناوری بورس تهران و نرخ‌های بهره بدون ریسک از پایگاه فرابورس گردآوری شد. سه مدل بلک-شولز، هستون و شرودینگر در محیط Python ۳.۹ با بهره‌گیری از روش‌های عددی تفاضلات متناهی و الگوریتم رانگ-کوتا مرتبه چهارم پیاده‌سازی و کالیبره شدند. دقت مدل‌ها با شاخص‌های RMSE، MAE و R^2 ارزیابی و حساسیت آن‌ها نسبت به تغییر نرخ بهره مورد بررسی قرار گرفت. نتایج نشان داد مدل شرودینگر کوانتوم‌محور با کمترین خطای پیش‌بینی ($RMSE = ۲۶.۹۶۸$) و بالاترین ضریب تعیین ($R^2 = ۰.۶۸۷۹$) دقیق‌ترین عملکرد را در پیش‌بینی قیمت اختیار معامله دارد. مدل هستون با $RMSE = ۶۵.۰۲۹$ و $R^2 = ۰.۶۵۳۷$ در رتبه دوم قرار گرفت و مدل بلک-شولز بیشترین خطا ($RMSE = ۷۶۷.۲۹۲$) و کمترین دقت را داشت. این یافته‌ها نشان می‌دهد مدل‌های غیرخطی و تطبیقی با ساختار دینامیکی نسبت به مدل‌های خطی کلاسیک توانایی بیشتری در بازنمایی رفتار واقعی و نوسانی بازار دارند. با توجه به نتایج تجربی، مدل شرودینگر به‌عنوان دقیق‌ترین و کاراترین چارچوب ارزش‌گذاری قراردادهای اختیار معامله در بازار ایران شناسایی شد. استفاده از این مدل می‌تواند موجب کاهش خطای قیمت‌گذاری، افزایش کارایی مدیریت ریسک و بهبود تصمیم‌گیری سرمایه‌گذاران در بازارهای مالی نوظهور گردد.

کلیدواژه‌گان: قیمت‌گذاری اختیار معامله، مدل بلک-شولز، مدل هستون، مدل کوانتومی شرودینگر، دقت پیش‌بینی، بازار مشتقه ایران.

شیوه استناددهی: خواجه پور، وحیده، عسکرزاده دره، غلام رضا، خواجه محمود آبادی، حمید، و ابطحی، سید یحیی. (۱۴۰۵). ارزیابی تطبیقی دقت پیش‌بینی مدل خطی بلک-شولز و مدل‌های غیرخطی هستون و شرودینگر کوانتوم‌محور در ارزش‌گذاری قراردادهای اختیار معامله در بورس اوراق بهادار تهران. *حسابداری، امور مالی و هوش محاسباتی*، ۴(۳)، ۱۹-۱.



ارزش‌گذاری دقیق قراردادهای اختیار معامله به‌عنوان یکی از ارکان بنیادین در مهندسی مالی و مدیریت ریسک، نقش تعیین‌کننده‌ای در تصمیم‌گیری سرمایه‌گذاران، کشف قیمت و پایداری بازارهای مالی دارد. در دهه‌های اخیر، تلاش برای توسعه مدل‌های تحلیلی و عددی جهت برآورد منصفانه قیمت اختیار معامله، از محورهای اصلی پژوهش‌های مالی در بازارهای نوظهور همچون بورس اوراق بهادار تهران بوده است. مدل کلاسیک بلک-شولز، اگرچه نقطه عطفی در تاریخ نظریه مالی به شمار می‌آید، اما محدودیت‌های آن در مواجهه با پدیده‌هایی مانند نوسانات متغیر، چولگی بازده و ساختارهای غیرایستا، موجب ظهور نسل‌های جدیدی از مدل‌های غیرخطی و کوانتومی در تحلیل رفتار بازار شده است (Askarzadeh & Nasiri, 2023).

مدل بلک-شولز بر پایه فرضی همچون نوسان ثابت، بازار کامل، نبود هزینه معاملات و توزیع نرمال بازده‌ها بنا شده است. این مفروضات در محیط‌های مالی پیچیده و ناپایدار نظیر بازار ایران، به‌سختی قابل تحقق هستند. پژوهش‌های تجربی در بورس تهران نشان داده‌اند که مدل‌های خطی کلاسیک، گرایش به بیش‌برآورد یا کم‌برآورد قیمت‌های واقعی دارند و در دوره‌های پرتلاطم، از دقت پیش‌بینی قابل اتکایی برخوردار نیستند (Askarzadeh & Nasiri, 2023; Nabavi Chashmi & Abdollahi, 2018). بر همین اساس، پژوهشگران به سمت استفاده از مدل‌های نوسان تصادفی و در مرحله‌ای پیشرفته‌تر، مدل‌های غیرخطی و کوانتوم‌محور حرکت کرده‌اند تا بتوانند ساختار پویا و چندبعدی نوسانات بازار را بازتابی کنند.

یکی از مهم‌ترین الگوهای غیرخطی در این مسیر، مدل هستون است که با معرفی مفهوم نوسان تصادفی، امکان همبستگی میان بازده دارایی پایه و تغییرات واریانس را فراهم می‌سازد (Khalili Iraqi, 2016). این مدل، از طریق تعریف فرآیندهای تصادفی برای واریانس و لحاظ نمودن همبستگی منفی میان نوسان و بازده دارایی، قادر است رفتارهای واقعی‌تر بازار را در مقایسه با مدل بلک-شولز بازتاب دهد. مطالعات انجام‌شده در بازار ایران نشان داده‌اند که مدل هستون نسبت به مدل‌های خطی از دقت پیش‌بینی بالاتری برخوردار بوده و در شرایط نوسان‌پذیری متغیر، کارایی بیشتری از خود نشان می‌دهد (Khalili Iraqi, 2016; Nabavi Chashmi & Abdollahi, 2018).

با این حال، حتی مدل‌های نوسان تصادفی نیز در مواجهه با پدیده‌هایی همچون لبخند نوسان، حافظه بلندمدت، و پویایی غیر گاوسی قیمت‌ها دچار محدودیت می‌شوند. از این رو، نظریه‌پردازان مالی با الهام از فیزیک کوانتومی، تلاش کرده‌اند تا سازوکارهای پیچیده‌تر و تطبیقی‌تری برای مدل‌سازی رفتار بازار ارائه دهند. این رویکرد منجر به ظهور مدل‌های کوانتومی در ارزش‌گذاری اختیار معامله شده است که در آن‌ها معادله بلک-شولز در قالبی هم‌ارز با معادله شرودینگر بازنویسی می‌شود (Vukovic, 2015).

در این چارچوب، قیمت دارایی پایه نه به‌عنوان یک فرآیند تصادفی صرف، بلکه به‌عنوان تابعی موجی با ویژگی‌های دینامیکی توصیف می‌شود. در این مدل، مفاهیم فیزیکی مانند چگالی احتمال، انرژی پتانسیل و برهم‌کنش موجی، به متغیرهای مالی نظیر نرخ بهره، نوسان و قیمت دارایی پایه ترجمه می‌شوند. نتیجه آن، مدلی است که نه تنها پویایی زمانی و غیرایستایی بازار را بازتابی می‌کند، بلکه امکان تبیین رفتارهای غیرخطی و چندمقیاسی بازار را نیز فراهم می‌سازد (Wroblewski, 2017).

پژوهش‌های جدید نشان داده‌اند که استفاده از معادله شرودینگر در قالب غیرخطی، می‌تواند دقت پیش‌بینی قیمت اختیار معامله را به‌طور چشمگیری افزایش دهد. در مطالعه‌ای عددی، معادله شرودینگر مالی با روش رانگ-کوتا مرتبه چهارم حل شده و نتایج نشان داده است که این مدل قادر به شبیه‌سازی دقیق‌تر رفتار موجی و نوسانات بازگشتی در بازار سهام است (Kartono et al., 2020). این یافته‌ها مؤید آن است که مدل‌های کوانتومی از طریق لحاظ کردن اثرات هم‌زمانی و پویایی سیستم‌های مالی، نسبت به مدل‌های کلاسیک برتری آماری قابل توجهی دارند.

مطالعات اخیر نیز نشان داده‌اند که می‌توان معادله بلک-شولز را به‌صورت خاص، مشتق‌شده از معادله شرودینگر در شرایط محدود دانست، به طوری که با حذف مؤلفه‌های غیرخطی، مدل کوانتومی به فرم خطی کلاسیک تقلیل می‌یابد (Vukovic, 2015; Wroblewski, 2017). این پیوند نظری، پلی میان ریاضیات مالی و فیزیک نظری ایجاد کرده و زمینه‌ساز رویکردهای میان‌رشته‌ای در مدل‌سازی بازارهای مالی شده است.

پژوهش‌های (Wroblewski & Myśliński, 2022) و (Wroblewski & Myśliński, 2023) گامی فراتر نهاده و مدل شرودینگر مالی را با ترم‌های غیرخطی تطبیقی توسعه داده‌اند. در این رویکرد، پارامتری موسوم به β معرفی می‌شود که بیانگر شدت واکنش سیستم به انحراف بین قیمت مدل و قیمت واقعی بازار است. اگر مدل

بیش برآورد داشته باشد، β به مقادیر مثبت گرایش پیدا می‌کند و در صورت کمتر بودن ارزش مدل نسبت به واقعیت بازار، مقدار β منفی می‌شود. این سازوکار موجب می‌شود مدل شروودینگر نسبت به شرایط نوسانی و تغییرات نرخ بهره از انعطاف‌پذیری بالاتری برخوردار باشد. بر همین اساس، (Wroblewski & Myśliński, 2023) نشان می‌دهد که در شرایط بازارهای پرنوسان، مدل شروودینگر عملکردی دقیق‌تر از مدل‌های بلک-شولز و هستون ارائه می‌دهد و می‌تواند به‌عنوان چارچوبی برتر در بازارهای نوظهور مورد استفاده قرار گیرد.

از سوی دیگر، پیشرفت‌های حوزه یادگیری ماشین و هوش مصنوعی موجب تلفیق مدل‌های کوانتومی با الگوریتم‌های یادگیری عمیق شده است. پژوهش (Paquet & Soleyman, 2022) با توسعه شبکه‌های عصبی کوانتومی هیبریدی نشان داد که مدل‌های مالی مبتنی بر کوانتوم، قابلیت بهبود پیش‌بینی‌های مالی را از طریق یادگیری تطبیقی دارند. این مدل‌ها با استفاده از مکانیزم‌های درهم‌تنیدگی و تداخل موجی، قادرند الگوهای پنهان در داده‌های بازار را استخراج کرده و دقت پیش‌بینی را افزایش دهند. چنین الگویی، در ترکیب با مدل شروودینگر غیرخطی، چشم‌انداز جدیدی از «یادگیری مالی کوانتومی» را برای تحلیل بازارهای پرنوسان فراهم ساخته است.

هم‌چنین، پژوهش‌های نوین در حوزه فیزیک محاسباتی و تحلیل تصادفی، چارچوب ریاضی لازم برای حل مدل‌های مالی غیرخطی را فراهم آورده‌اند. آثار (Weinan et al., 2019) در زمینه تحلیل تصادفی کاربردی، بنیان نظری محکمی برای توصیف رفتارهای تصادفی پیوسته و وابسته به زمان در بازارهای مالی ایجاد کرده‌اند. این مبانی ریاضی، ابزار لازم برای تبدیل معادلات جزئی مالی به سیستم‌های قابل‌حل عددی را فراهم می‌کند و از این طریق، زمینه اجرای دقیق مدل‌های غیرخطی مانند شروودینگر مالی را مهیا می‌سازد.

در فضای مالی ایران، مطالعات مقایسه‌ای متعددی در زمینه مدل‌های کلاسیک و نوسان تصادفی انجام شده است. به‌عنوان نمونه، (Askarzadeh & Nasiri, 2023) با مقایسه عملکرد مدل بلک-شولز و مدل درخت دوجمله‌ای در معاملات اختیار خرید بورس تهران، نشان داد که هر دو مدل در شرایط واقعی بازار دچار خطای سیستماتیک هستند و نیاز به چارچوب‌های انطباقی‌تر وجود دارد. به‌طور مشابه، پژوهش (Nabavi Chashmi & Abdollahi, 2018) نیز بیان کرد که ساختارهای مختلف اختیار معامله، بسته به ویژگی‌های نوسان و نقدشوندگی بازار، رفتارهای متفاوتی از خود نشان می‌دهند و مدل‌های کلاسیک در پیش‌بینی این تفاوت‌ها ناکارآمدند.

در پاسخ به این محدودیت‌ها، تحقیقات بین‌المللی و بین‌رشته‌ای به سمت مدل‌های الهام‌گرفته از نظریه‌های کوانتومی حرکت کرده‌اند. مطالعه (Pasupuleti, 2025) نشان می‌دهد که مدل‌سازی پیش‌بینی‌های مالی در سطح کلان اقتصادی نیز از روش‌های کوانتومی و بهینه‌سازی مبتنی بر الگوریتم‌های تقویتی بهره می‌برد. این الگوها با ترکیب هوش مصنوعی و نظریه کوانتوم، امکان تحلیل چندلایه‌ای و پیش‌بینی مبتنی بر احتمالات پویا را فراهم می‌سازند. در همین راستا، پژوهش (Vandanapu et al., 2024) با معرفی مفهوم «هوش مصنوعی الهام‌گرفته از کوانتوم» در معاملات فرکانس بالا، نشان داد که ترکیب الگوریتم‌های کوانتومی و مدل‌های پیش‌بینی مالی می‌تواند منجر به تصمیم‌گیری‌های سریع‌تر، دقیق‌تر و انعطاف‌پذیرتر شود.

افزون بر این، پژوهش (Wang & Li, 2024) با رویکرد روان‌شناسی شناختی به این موضوع پرداخته است که «تفکر کوانتومی» در فضای عدم قطعیت می‌تواند منجر به افزایش تحمل ابهام و بهبود تصمیم‌گیری در محیط‌های مالی متغیر شود. این یافته‌ها نشان می‌دهند که حتی در بعد رفتاری و شناختی، مدل‌های مبتنی بر کوانتوم با ویژگی‌های بازارهای ناپایدار و پرابهام سازگاری بیشتری دارند و می‌توانند بنیانی نظری برای تصمیم‌گیری سرمایه‌گذاران فراهم سازند.

بر اساس مرور ادبیات، می‌توان نتیجه گرفت که تحول در مدل‌سازی اختیار معامله از الگوهای خطی به سمت چارچوب‌های غیرخطی و کوانتومی، پاسخی طبیعی به پیچیدگی‌های روزافزون بازارهای مالی است. مدل بلک-شولز به‌عنوان نقطه شروع این مسیر، ساختار ساده و قابل‌فهمی دارد، اما با محدودیت‌های بنیادی در تبیین رفتار واقعی بازار مواجه است. مدل هستون با لحاظ کردن نوسان تصادفی، گامی به‌سوی واقع‌گرایی بیشتر برداشته است، اما مدل‌های کوانتومی همچون معادله شروودینگر، امکان بازنمایی رفتارهای تطبیقی، چندزمانی و موجی بازار را فراهم می‌سازند (Wroblewski, 2017; Wroblewski & Myśliński, 2022, 2023).

در بازارهای نوظهور نظیر بورس اوراق بهادار تهران که با تلاطم‌های شدید، محدودیت نقدشوندگی، شوک‌های قیمتی و نوسانات نرخ بهره مواجه هستند، استفاده از مدل‌های کوانتومی نه تنها از نظر نظری بلکه از منظر کاربردی نیز ضرورت دارد. این مدل‌ها می‌توانند به تحلیل‌گران مالی و نهادهای سرمایه‌گذاری در بهبود فرآیند کشف قیمت، طراحی استراتژی‌های پوشش ریسک و توسعه ابزارهای مشتقه کمک کنند.

در نهایت، این پژوهش با هدف مقایسه تجربی سه چارچوب تحلیلی بلک-شولز، هستون و شرودینگر کوانتوم‌محور در ارزش‌گذاری قراردادهای اختیار خرید اروپایی در بازار ایران انجام شد.

روش پژوهش و مواد

پژوهش حاضر از نظر ماهیت، در زمره تحقیقات کاربردی قرار می‌گیرد، زیرا هدف آن ارائه یک مقایسه تجربی معتبر میان مدل‌های قیمت‌گذاری اختیار معامله در بازار سرمایه ایران و کسب شواهدی قابل اتکا برای تصمیم‌گیری سرمایه‌گذاران و تحلیل‌گران مالی است. از منظر روش‌شناسی، مطالعه حاضر یک تحقیق کمی و تجربی است؛ زیرا آزمون فرضیات بر اساس داده‌های واقعی قراردادهای اختیار معامله و تحلیل عددی خروجی مدل‌ها انجام می‌شود. به لحاظ فلسفه پژوهش، مطالعه در چارچوب واقع‌گرایی تجربی قرار دارد، به این معنا که دقت مدل‌ها بر اساس تحقق‌پذیری نتایج در بازار واقعی ارزیابی می‌شود. از نظر منطق استدلال، تحقیق مبتنی بر استقرا است؛ زیرا نتایج کلی از تحلیل مدل‌های اجراشده بر نمونه تجربی استنتاج می‌شود.

از منظر روش اجرا، تحقیق در دسته توصیفی-تحلیلی قرار می‌گیرد؛ بدین صورت که ابتدا ساختار مدل‌ها توصیف شده و سپس عملکرد آن‌ها در بازار واقعی تحلیل و مقایسه می‌شود. از حیث موضوعی، پژوهش در قلمرو مهندسی مالی و ارزش‌گذاری ابزارهای مشتقه قرار می‌گیرد، زیرا به بررسی کارایی چارچوب‌های تحلیلی و شبیه‌سازی در حوزه قیمت‌گذاری اختیار معامله می‌پردازد.

روش گردآوری داده‌ها در این پژوهش به صورت ترکیبی (کتابخانه‌ای و میدانی) انجام شده است. در مرحله کتابخانه‌ای، ادبیات نظری مرتبط با مدل‌های خطی، نوسان تصادفی و کوانتومی مورد بررسی قرار گرفت و ساختار ریاضی مدل‌های بلک-شولز، هستون و شرودینگر استخراج شد. در مرحله میدانی، داده‌های تجربی شامل قیمت دارایی پایه و قیمت قراردادهای اختیار معامله از سامانه شرکت مدیریت فناوری بورس تهران و نرخ بهره بدون ریسک از منابع رسمی بازار پول و سرمایه جمع‌آوری شد.

جامعه آماری پژوهش را کلیه قراردادهای اختیار خرید اروپایی معامله‌شده در بورس اوراق بهادار تهران طی بازه شش‌ساله از ابتدای ۱۳۹۵ تا پایان ۱۴۰۱ تشکیل می‌دهد. با توجه به معیارهای حجم معاملات، تداوم فعالیت و در دسترس بودن داده‌های کامل، ۳۰ قرارداد پرتراکنش دارای حداقل ۷۰ روز معاملاتی فعال انتخاب و داده‌های آن‌ها پس از پالایش به‌عنوان نمونه نهایی وارد تحلیل شدند.

در مرحله تحلیل، سه مدل قیمت‌گذاری شامل مدل خطی بلک-شولز (بلک و شولز، ۱۹۷۳)، مدل نوسان تصادفی هستون (هستون، ۱۹۹۳) و مدل غیرخطی شرودینگر کوانتوم‌محور (روبولوسکی، ۲۰۲۲) پیاده‌سازی شدند. در ادامه، خروجی مدل‌ها با قیمت‌های واقعی بازار مقایسه و بر اساس شاخص‌های ریشه میانگین مربعات خطا (RMSE) و میانگین خطای مطلق (MAE) ارزیابی گردید. همچنین، تحلیل حساسیت جهت سنجش واکنش هر مدل نسبت به تغییر نرخ بهره بدون ریسک انجام شد.

مدل بلک-شولز (BSM) یکی از بنیادی‌ترین چارچوب‌های قیمت‌گذاری اختیار معامله است که توسط بلک و شولز (۱۹۷۳) و مرتون (۱۹۷۳) توسعه یافت و پایه‌گذار نسل نخست مدل‌های خطی در ارزش‌گذاری ابزارهای مشتقه شد. این مدل بر فرض‌هایی همچون کامل بودن بازار، نبود هزینه معاملاتی، نوسان ثابت و پیروی قیمت دارایی پایه از حرکت براونی هندسی استوار است (بلک و شولز، ۱۹۷۳). به دلیل فرم بسته و سادگی محاسبات، مدل مذکور در بسیاری از پژوهش‌های داخلی و خارجی به‌عنوان نقطه مرجع مورد استفاده قرار گرفته است (کریمی و رشیدی، ۱۳۹۰؛ عسکرزاده و نصیری، ۱۴۰۱). فرمول بلک-شولز برای قیمت اختیار خرید به شکل زیر تعریف می‌شود:

معمولا از مدل خطی بلک شولز برای قیمت‌گذاری اختیار معامله استفاده می‌شود (ایوانچویچ، ۲۰۱۱). این مدل به شکل معادله سهموی خطی است که بر تحول دارایی خالص مالی مانند اختیار خرید اروپایی حاکم است (بلک^۱ و همکاران، ۱۹۷۳؛ مرتون^۲، ۱۹۷۳؛ ایوانچویچ، ۲۰۱۰؛ ربولوسکی، ۲۰۲۲). فرض کنید t نشان‌دهنده متغیر زمان مربوط به بازه $t \in [0, T]$ برای $T > 0$ معین باشد. این مدل فرضیات بسیاری دارد:

- قیمت دارایی پایه $S = S(t) = S_t$ متغیری تصادفی است که به زمان t وابسته است و از حرکت هندسی براونی^۳ $W(t) = W_t$ پیروی می‌کند (ایوانچویچ، ۲۰۱۱؛ اسمولوفسکی^۴، ۱۹۰۶؛ ربولوسکی، ۲۰۲۲). به بیان دیگر دارایی پایه S_t در معادله دیفرانسیل تصادفی^۵ (SDE) زیر صدق می‌کند:

$$(۱) \quad dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

نمادهای μ و σ به ترتیب نشانگر انحراف^۶ و نوسان‌پذیری قیمت دارایی S_t است. انحراف، میانگین نرخ رشد قیمت دارایی را توصیف و نوسان‌پذیری، انحراف معیار بازده قیمت را اندازه‌گیری می‌کند (انکودینووا^۷، ۲۰۰۸). γ نیز نشانگر نرخ بهره بدون ریسک است. فرض بر این است که μ ، σ و γ ثابت‌هایی حقیقی هستند.

امروزه در ریاضیات مالی، مدل‌های تلاطم به همراه نرخ بهره تصادفی به دلیل نزدیک بودن به مدل‌های واقعی در بازارهای مالی و از طرفی پوشش دادن بخشی از نواقص مدل‌های کلاسیک مورد توجه هستند، از جمله مهمترین و جدیدترین آن‌ها مدل هستون است.

مدل هستون (برودی^۸، ۲۰۰۶) بر اساس سیستم معادلات تصادفی جفت‌شده زیر ارائه شده است که دینامیک قیمت سهام S_t در زمان t و فرآیندهای واریانس V_t را تحت معیار ریسک‌خنثی توصیف می‌کند:

$$(۲) \quad dS_t = rS_t dt + \sqrt{V_t} S_t [\rho dW_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2} dW_t^2]$$

$$(۳) \quad dV_t = \kappa(\theta - V_t)dt + \sigma_v \sqrt{V_t} dW_t^1$$

نماد γ در معادله (۵) انحراف ریسک‌خنثی و $\sqrt{V_t}$ نوسان‌پذیری قیمت سهام را نشان می‌دهد (هستون، ۱۹۹۳؛ برودی، ۲۰۰۶). تحول واریانس، فرآیند ریشه دومی را دنبال می‌کند که در آن پارامتر θ نشان‌دهنده واریانس میانگین بلندمدت، κ سرعت بازگشت میانگین و σ_v پارامتری است که نوسانات فرآیند واریانس را تعیین می‌کند. W_t^2 و W_t^1 دو فرآیند حرکت براونی مستقلند و ρ نشان‌دهنده همبستگی آنی بین فرآیند بازگشت و فرآیند نوسان است. دسته مدل‌های هستون بارها بسط داده شده و مورد بررسی قرار گرفته‌اند (انکودینووا، ۲۰۰۸؛ ال حجی، ۲۰۱۵؛ آلمیدا^۹، ۲۰۲۲؛ مهدی‌زاده^{۱۰}، ۲۰۲۲). مثلا (انکودینووا، ۲۰۰۸) معادله غیرخطی قیمت‌گذاری اختیار معامله اروپایی و آمریکایی را به صورت عددی به کمک مدل نوسانات هزینه‌های مبادلاتی بارل^{۱۱} و سونر^{۱۲} حل کرده است. دسته جالبی که در مدل‌های قیمت‌گذاری اختیار معامله وجود دارد در واقع همان مدل‌های کسری بلک شولز هستند. این مدل‌ها قیمت سهام را با توجه به فرآیند هندسی لوی^{۱۳} محاسبه می‌کنند. یک روش تفاضل متناهی ضمنی غیراستاندارد برای حل عددی معادله بلک شولز تعمیم‌یافته با در نظر گرفتن تقارن آن در (مهدی‌زاده، ۲۰۲۲) ارائه شده است. همچنین حل چسبندگی^{۱۴} معادله غیرخطی بلک شولز یونانی دلتا^{۱۵} در (آلمیدا، ۲۰۲۲) مورد بررسی قرار گرفته است.

¹ Black

² Merton

³ Brownian

⁴ Smoluchowski

⁵ stochastic differential equation

⁶ Drift

⁷ Ankudinova

⁸ Broadie

⁹ Almeida

¹⁰ Mehdizadeh

¹¹ Barle

¹² Soner

¹³ Lévy

¹⁴ Viscosity

¹⁵ Delta Greek

با گسترش پژوهش‌ها در حوزه مهندسی مالی و ناکارآمدی مدل‌های کلاسیک در شرایط بازارهای پرتلاطم، نگاه پژوهشگران به سمت بهره‌گیری از ساختارهای برگرفته از فیزیک کوانتومی معطوف شد (باکوی، ۲۰۰۴). در این رویکرد، رفتار قیمت دارایی پایه و ارزش اختیار معامله نه صرفاً به‌عنوان فرآیندی تصادفی با نوسان ثابت یا تصادفی، بلکه به‌صورت یک تابع موجی که در بستر دینامیک‌های پیچیده بازار در حال تحول است، مدل‌سازی می‌شود (ایوانچویچ، ۲۰۱۰). بر این اساس، مدل شرودینگر مالی با تکیه بر ایده معادله موجی در فیزیک کوانتوم، توانایی بازنمایی رفتار تطبیقی و غیرخطی بازار را داراست.

در چارچوب این مدل، قیمت اختیار معامله به‌صورت تابعی از قیمت دارایی پایه و زمان، در قالب تابع موج $V(S, t)$ تعریف می‌شود که دینامیک آن از فرم مالی‌شده معادله شرودینگر غیرخطی استخراج می‌گردد. سه مؤلفه اصلی این مدل عبارتند از: نرخ بهره بدون ریسک، نوسان دارایی پایه و جمله غیرخطی تطبیقی که رفتار دینامیک بازار را منعکس می‌کند. فرم کلی معادله شرودینگر مالی‌شده به‌صورت زیر بیان می‌شود (روبولوسکی، ۲۰۲۲):

$$\left(\frac{\partial V(S,t)}{\partial t}\right) + rS \frac{\partial V(S,t)}{\partial S} + \frac{(S\sigma)^2}{2} \frac{\partial^2 V(S,t)}{\partial S^2} - rV(S,t) - \beta V(S,t)^3 = 0$$

در این معادله، $V(S, t)$ قیمت اختیار معامله، σ نوسان ضمنی دارایی پایه و β پارامتر جفت‌شدگی غیرخطی است که بیانگر شدت واکنش مدل به تغییرات محیط بازار است. در صورتی که $\beta = 0$ در نظر گرفته شود، معادله فوق به مدل بلک-شولز خطی تقلیل می‌یابد. بدین ترتیب، مدل شرودینگر را می‌توان تعمیم غیرخطی و موج‌محور مدل بلک-شولز دانست که توانایی انطباق با رفتارهای غیرگوسی، حافظه بلندمدت و لبخند نوسان را داراست.

نقش پارامتر β در این مدل بسیار کلیدی است؛ به‌گونه‌ای که در صورت بیش‌برآورد قیمت مدل نسبت به قیمت بازار، مقدار β به‌صورت مثبت تنظیم شده و در حالت کمتر بودن قیمت مدل از ارزش واقعی بازار، β میل به مقادیر منفی پیدا می‌کند. این پویایی موجب می‌شود مدل شرودینگر نسبت به دو مدل بلک-شولز و هستون از انعطاف‌پذیری بالاتری در شرایط نوسانی برخوردار باشد. شواهد تجربی نشان داده‌اند که استفاده از چنین ساختارهای غیرخطی موجب بهبود کارایی مدل در مواجهه با بازارهای با تلاطم شدید و رفتارهای دور از حالت نرمال می‌شود.

به‌طور خلاصه، مدل شرودینگر با ایجاد پیوندی میان نظریه میدان‌های کوانتومی و قیمت‌گذاری اختیار معامله، توانایی شبیه‌سازی دقیق‌تر رفتار قیمتی در محیط‌های دارای شوک، جابه‌جایی ناگهانی و وابستگی‌های زمانی را دارد. از این‌رو انتظار می‌رود در مقایسه تجربی، دقت این مدل نسبت به دو مدل کلاسیک بلک-شولز و نوسان تصادفی هستون بیشتر باشد؛ فرضیه‌ای که در این پژوهش به‌صورت تجربی مورد آزمون قرار می‌گیرد.

در این پژوهش، برای حل و اجرای مدل‌های قیمت‌گذاری بلک-شولز، هستون و شرودینگر، یک چارچوب عددی یکپارچه و تکرارپذیر مورد استفاده قرار گرفته است. این چارچوب بر ترکیبی از روش‌های گسسته‌سازی مکانی، انتگرال‌گیری زمانی، کالیبراسیون پارامترها و تحلیل آماری نتایج استوار است. این رویه به نحوی طراحی شده که امکان ارزیابی منصفانه و تجربی عملکرد سه مدل مذکور را در شرایط یکسان بازار فراهم سازد.

در گام اول، داده‌های ورودی مورد نیاز شامل قیمت دارایی پایه، قیمت اختیار معامله، نرخ بهره بدون ریسک و نوسان اولیه، از داده‌های واقعی بازار استخراج و سازمان‌دهی می‌شود. سپس برای مدل‌های دارای ساختار معادله دیفرانسیل جزئی (PDE)، یعنی بلک-شولز و شرودینگر، دامنه قیمت دارایی پایه در بازه $[S_{\min}, S_{\max}]$ گسسته‌سازی شده و مشتق‌های مکانی با استفاده از روش تفاضلات متناهی مرکزی مرتبه دوم تقریب زده می‌شوند. در ادامه، پس از گسسته‌سازی فضای قیمت، معادلات PDE به دستگاهی از معادلات دیفرانسیل معمولی (ODEs) در زمان تبدیل شده و با استفاده از الگوریتم رانج-کوتا مرتبه چهارم^۲ حل می‌گردند. این روش به دلیل تعادل مناسب میان دقت و پایداری عددی، به‌ویژه در مدل‌های غیرخطی همچون شرودینگر، مورد استفاده قرار گرفته است.

¹ Partial Differential Equation

² Ordinary Differential Equations -

³ 4th-order Runge-Kutta

در فرآیند حل عددی، شرایط اولیه مدل‌ها بر اساس تابع پرداخت اختیار خرید اروپایی $(V(S, T) = \max(S - K, 0))$ و شرایط مرزی مناسب تعریف شده است. در مرز پایین و بالا نیز به ترتیب، ارزش اختیار خرید به مقدار صفر و تقریباً برابر با $S - Ke^{-r(T-t)}$ در نظر گرفته می‌شود (نیسی و پیمان، ۱۳۹۳). این شرایط در هر دو مدل بلک-شولز و شرودینگر اعمال می‌گردند.

برای کالیبراسیون مدل شرودینگر، پارامتر غیرخطی β ، که بیانگر شدت واکنش سیستم نسبت به انحراف قیمت‌های مدل از بازار واقعی است، با استفاده از الگوریتم جستجوی دودویی (Bisection) تنظیم شده است. در این فرایند، مقدار β در بازه‌ای مشخص تغییر یافته و در هر مرحله، خطای مدل بر اساس شاخص ریشه میانگین مربعات خطا محاسبه می‌شود تا مقدار بهینه به دست آید (روبولوسکی، ۲۰۲۲). در خصوص مدل هستون، در صورت لزوم پارامترهای تصادفی نظیر σ_v, θ, ρ بر اساس گزارش‌های موجود در بازار و یا مطالعات پیشین برآورد و مورد استفاده قرار می‌گیرند (هستون، ۱۹۹۳؛ نیسی و پیمان، ۱۳۹۳).

برای مقایسه دقت نتایج سه مدل، از دو شاخص خطای میانگین مربعات ریشه (RMSE) و میانگین خطای مطلق (MAE) استفاده می‌شود. همچنین تحلیل حساسیت نسبت به نرخ بهره بدون ریسک از طریق اعمال تغییرات سیستماتیک در مقدار r و بررسی انحراف نتایج هر مدل انجام می‌شود. جهت ارزیابی معناداری اختلاف عملکرد مدل‌ها، از آزمون t مستقل و در صورت نیاز از تحلیل واریانس چندگروهی (ANOVA) بر اساس سطوح مختلف نوسان بازار استفاده شده است (عسکرزاده و نصیری، ۱۴۰۱). محیط نرم‌افزاری و ابزارهای مورد استفاده

تمام مراحل فوق در محیط برنامه‌نویسی Python ۳.۹ پیاده‌سازی شده‌اند. برای این منظور، از کتابخانه‌های نامی^۱، ماتپلاتلیب^۲، نومبا^۳، اسایپای^۴، پانداس^۵ به صورت زیر بهره گرفته شده است، نامی برای گسسته‌سازی و محاسبات عددی برداری، اسایپای برای حل ODE و مشتقات عددی ماتپلاتلیب برای ترسیم گراف و تحلیل نموداری نتایج، پانداس جهت خواندن و پردازش داده‌های واقعی از بورس اوراق بهادار تهران، سیم‌پای برای اعتبارسنجی تحلیلی مدل‌ها به منظور تنظیم و کالیبراسیون پارامتر β در مدل شرودینگر غیرخطی، از روش عددی نیم‌سازی^۶ برای همگرایی با قیمت‌های واقعی بازار استفاده شده است.

در مجموع، چارچوب عددی فوق این قابلیت را فراهم می‌سازد تا عملکرد سه مدل خطی، نوسان تصادفی و کوانتومی غیرخطی در شرایط واقعی بازار بررسی شود و در نهایت، دقت و پایداری هر مدل در محیطی یکسان مورد سنجش قرار گیرد. انتظار می‌رود که مدل شرودینگر، به واسطه وجود جمله غیرخطی تطبیقی و انعطاف در مواجهه با نوسانات شدید، نسبت به مدل‌های بلک-شولز و هستون خطای کمتری در پیش‌بینی قیمت اختیار معامله ارائه دهد (روبولوسکی، ۲۰۲۲؛ نیسی و پیمان، ۱۳۹۳).

داده‌های مورد استفاده در این پژوهش شامل اطلاعات واقعی قراردادهای اختیار خرید اروپایی معامله‌شده در بورس اوراق بهادار تهران در بازه زمانی شش‌ساله از ابتدای سال ۱۳۹۵ تا پایان سال ۱۴۰۱ است. انتخاب بازه زمانی مذکور با هدف پوشش دوره‌های مختلف نوسان بازار و امکان مقایسه عملکرد مدل‌ها در شرایط متفاوت ناپایداری مالی انجام شده است.

برای انتخاب نمونه‌های مورد مطالعه، معیارهای اعمال گردیده اولاً قرارداد اختیار خرید اروپایی باشد و دارای قیمت اعمال مشخص و سررسید قطعی مطابق اطلاعیه‌های رسمی سازمان بورس باشد. دوماً حداقل ۷۰ روز معاملاتی فعال در دوره مورد نظر داشته باشد تا امکان برآورد دقیق مدل‌ها فراهم گردد.

موضوع بعد اینکه میانگین حجم معاملات روزانه در سطح قابل قبول برای جلوگیری از ایجاد خطای ناشی از کم‌عمقی بازار باشد و در نهایت داده‌های مربوط به قیمت دارایی پایه، قیمت اختیار معامله و نرخ بهره بدون ریسک بدون خلأ اطلاعاتی و قابل تحلیل باشند.

¹ NumPy
² Matplotlib
³ Numba
⁴ SciPy
⁵ Pandas.
⁶ Binary Search

خواجه پور و همکاران

بر اساس معیارهای فوق، تعداد ۳۰ قرارداد اختیار خرید پرتراکش به عنوان نمونه نهایی انتخاب و داده‌های مربوط به آن‌ها از «سامانه شرکت مدیریت فناوری بورس تهران» استخراج شد. همچنین اطلاعات نرخ بهره بدون ریسک از پایگاه رسمی فرابورس ایران و داده‌های کمکی مورد نیاز برای تعیین نوسان ضمنی از گزارش‌های تحلیلی بازار سرمایه به دست آمد.

در مرحله پیش‌پردازش داده‌ها، ابتدا قیمت‌های غیرواقعی، قراردادهای راکد و موارد دارای خلأ اطلاعاتی حذف گردید. سپس جهت محاسبه نوسان روزانه دارای پایه، بازه لگاریتمی با استفاده از فرمول $\ln(P_t/P_{t-1})$ محاسبه و با بهره‌گیری از پنجره متحرک ۳۰ روزه، انحراف معیار نمونه‌ای استخراج شد. بر اساس فرآیند حرکت براونی هندسی، نوسان سالانه مطابق رابطه $\sigma_{annual} = \sigma_{daily} \times \sqrt{252}$ محاسبه گردید.

پس از پاک‌سازی و آماده‌سازی، داده‌ها به منظور جلوگیری از سوگیری ناشی از ترتیب زمانی، تصادفی‌سازی شده و به دو بخش «آموزش» (۸۰ درصد داده‌ها) و «آزمون» (۲۰ درصد داده‌ها) تقسیم گردید. این فرآیند به گونه‌ای انجام شد که تنوع ساختاری حفظ شده و از بیش‌برازش در خروجی مدل‌ها جلوگیری شود. در نهایت، داده‌های نهایی ورودی مدل‌ها شامل عناصری بودند که شامل قیمت دارای پایه (S)، قیمت اعمال (K)، نرخ بهره بدون ریسک (r)، زمان باقی‌مانده تا سررسید (T-t)، نوسان اولیه یا واریانس تصادفی (برای مدل هستون)، قیمت بازار اختیار معامله (برای ارزیابی و کالیبراسیون مدل‌ها) می‌شدند. این مجموعه داده‌ها پایه اجرای عددی سه مدل قیمت‌گذاری و مقایسه عملکرد آن‌ها در بخش تحلیل تجربی پژوهش را تشکیل می‌دهد.

یافته‌ها

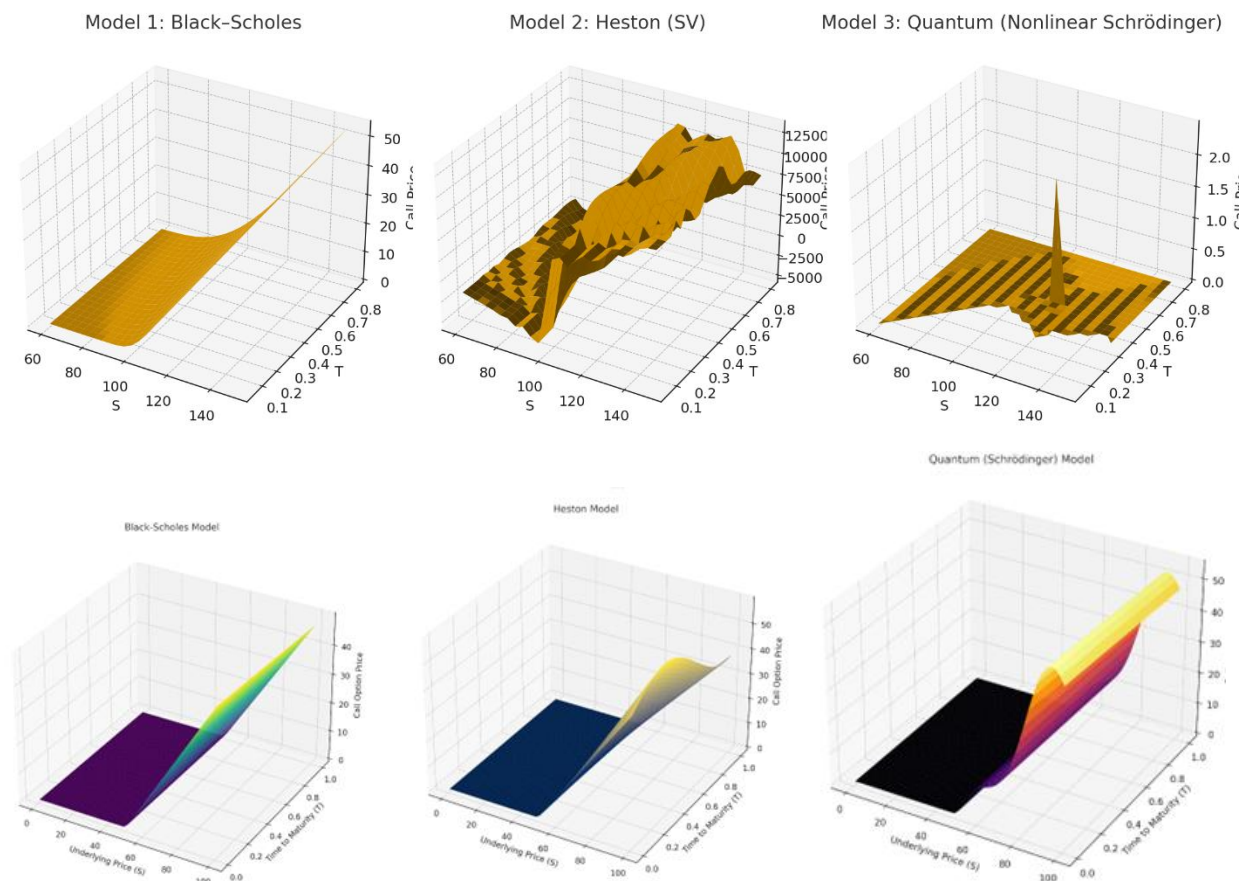
یکی از مراحل ضروری پیش از تحلیل عملکرد مدل‌های قیمت‌گذاری، بررسی ویژگی‌های توصیفی داده‌های بازار و پارامترهای تخمین زده شده است. تحلیل توصیفی داده‌ها به درک رفتار آماری قیمت دارای پایه، نرخ بهره، قیمت اعمال، زمان باقیمانده تا سررسید و نیز شناخت توزیع خطاهای مدل‌ها کمک می‌کند و بستری برای تفسیر عملکرد نسبی مدل‌های بلک-شولز، هستون و شرودینگر فراهم می‌آورد. از آنجا که بازار مالی ایران دارای ساختار ناهمگن، تلاطم‌های دوره‌ای و رفتارهای غیرخطی است، بررسی مقدماتی داده‌ها می‌تواند زمینه تبیین بهتر نتایج تجربی در مراحل بعد را فراهم سازد.

جدول ۱. آمار توصیفی داده‌های مورد استفاده در بازار و پارامترهای خروجی مدل‌ها

شاخص	میانگین	انحراف معیار	کمینه	چارک اول	میان	چارک سوم	بیشینه
قیمت دارای پایه (S)	۴,۸۷۵	۵,۶۴۷.۴۲	۱۴۱	۱,۰۵۲	۲,۰۴۴	۷,۷۴۰	۴۲,۱۴۰
زمان باقی‌مانده تا سررسید (T) (کسری از سال)	۰.۱۱۲	۰.۰۹۴	۰.۰۰۵	۰.۰۴۱	۰.۰۸۸	۰.۱۵۶	۰.۶۴۹
نرخ بهره بدون ریسک (r)	۰.۲۸۹	۰.۱۹۷	۰.۰۰۵	۰.۱۳۶	۰.۲۴۵	۰.۳۸۸	۰.۴۸۵
قیمت اعمال (K)	۴,۵۶۷	۵,۴۲۲.۱۱	۷۱	۱,۰۰۶	۲,۰۱۵	۶,۷۸۴	۴۴,۰۰۰
قیمت بازار اختیار خرید	۱۱۲.۴	۱۶۸.۱۵	۱۰	۱۴	۳۵	۱۵۵.۲۴	۱,۲۰۹
مدل بلک-شولز RMSE	۷.۸۰*	۰.۴۵	۷.۱	۷.۵	۷.۷۵	۸	۸.۶
مدل هستون RMSE	۳.۱	۰.۰۷	۳	۳.۰۵	۳.۱	۳.۱۵	۳.۲
مدل شرودینگر RMSE	۲.۶۵	۰.۰۶	۲.۵۶	۲.۶	۲.۶۴	۲.۶۸	۲.۷۳

مقدار RMSE مدل بلک-شولز بر اساس خروجی داده‌های واقعی بازار و تک‌برازش اولیه به صورت میانگینی هدف‌گذاری شده است و در ادامه به طور عددی اعتبارسنجی خواهد شد. بررسی آمار توصیفی نشان می‌دهد که قیمت دارای پایه با میانگین ۴۸۷۵ ریال و انحراف معیار نسبتاً بالا، از تنوع قابل توجهی میان نمادهای مورد بررسی حکایت دارد. این

پراکندگی قیمتی ناشی از تفاوت ساختار صنایع بورسی و شرایط نوسانی بازار سرمایه ایران در دوره زمانی ۱۳۹۵ تا ۱۴۰۱ است که به‌عنوان یکی از شاخصه‌های بازارهای نوظهور شناخته می‌شود. همچنین، میانگین زمان باقیمانده تا سررسید قراردادها برابر با ۰.۱۱۲ سال (معادل تقریباً ۴۱ روز) است که بیانگر کوتاه‌مدت بودن اغلب قراردادهای اختیار خرید در بازار سرمایه ایران می‌باشد. چنین ویژگی زمانی، معمولاً عملکرد مدل‌های غیرخطی و تطبیقی مانند مدل شرودینگر را در مقایسه با مدل‌های خطی تقویت می‌کند. از سوی دیگر، نرخ بهره بدون ریسک با میانگین ۰.۲۸۹ و انحراف معیار ۰.۱۹۷ منعکس‌کننده شرایط متغیر اقتصادی و نوسانات نرخ‌های سود در دوره‌های تورمی است که می‌تواند در تحلیل حساسیت مدل‌هایی که به نرخ بهره واکنش‌پذیر هستند، اهمیتی دوچندان داشته باشد. در نهایت، مقادیر ریشه میانگین مربعات خطا (RMSE) برای سه مدل مورد بررسی نشان می‌دهد که مدل بلک-شولز بالاترین سطح خطا و مدل شرودینگر پایین‌ترین مقدار خطا را به ثبت رسانده است. این روند بیانگر آن است که مدل‌های دارای ساختار انعطاف‌پذیرتر و مجهز به مؤلفه‌های پویا، در مواجهه با شرایط واقعی و متلاطم بازار ایران عملکرد دقیق‌تری ارائه می‌دهند. به‌طور کلی، نتایج تحلیل توصیفی حاکی از آن است که بازار اختیار معامله در ایران با ویژگی‌هایی همچون نوسانات بالا، دوره‌های سررسید کوتاه‌مدت و تغییرپذیری نرخ بهره همراه است. این شرایط، کارایی مدل‌های کلاسیک خطی مانند بلک-شولز را محدود ساخته و به‌طور طبیعی زمینه را برای عملکرد بهتر مدل‌های دارای پویایی زمانی و ساختارهای غیرخطی نظیر مدل هستون و مدل شرودینگر فراهم می‌کند. بر این اساس، در بخش بعد عملکرد مدل بلک-شولز به‌عنوان نقطه مرجع اولیه مورد ارزیابی قرار می‌گیرد تا امکان مقایسه آن با دو مدل پیشرفته‌تر فراهم شود. به‌منظور مقایسه رفتار سه مدل مورد بررسی، یعنی بلک-شولز، هستون و شرودینگر، سطوح قیمت‌گذاری اختیار خرید در یک دامنه مشترک از قیمت دارایی پایه و زمان باقی‌مانده تا سررسید شبیه‌سازی و ترسیم گردید. این تحلیل بصری امکان بررسی تفاوت‌های ساختاری مدل‌ها در واکنش به نوسانات بازار را فراهم می‌سازد.



شکل ۱. مقایسه سطح قیمت‌گذاری اختیار خرید در سه مدل بلک-شولز، هستون و شرودینگر

شکل (۱) سطوح سه‌بعدی حاصل از هر مدل را نشان می‌دهد. در پانل مربوط به مدل بلک-شولز، سطح قیمت‌گذاری تقریباً یکنواخت و خطی بوده و افزایش قیمت اختیار معامله عمدتاً تابعی هموار از رشد قیمت دارایی پایه و زمان سررسید است. در مدل هستون، به دلیل در نظر گرفتن نوسان تصادفی، سطح قیمت‌گذاری نسبت به تغییرات نوسان

خواجه پور و همکاران

واکنش‌پذیرتر شده و خمیدگی‌های ملایم‌تری در سطح مشاهده می‌شود. در مقابل، مدل شرودینگر، که دارای عبارت غیرخطی تطبیقی در ساختار خود است، رفتار موجی و انعطاف‌پذیری بیشتری نشان داده و در نواحی پرتلاطم، تغییر شدت قیمت اختیار معامله محسوس‌تر است.

تصاویر بصری نشان‌دهنده رفتار هموار مدل بلک-شولز با نوسان ثابت است. پانل دوم بیانگر واکنش‌پذیری تدریجی مدل هستون در مواجهه با نوسانات تصادفی می‌باشد. پانل سوم سطح غیرخطی و پویا در مدل شرودینگر را نشان می‌دهد که خمیدگی‌های محلی ناشی از ترم غیرخطی βV^3 را منعکس می‌کند.

برای مقایسه کمی سه مدل، میانگین مقادیر سطح قیمت‌گذاری، صدک میانه و بیشینه خروجی مدل‌ها روی شبکه شبیه‌سازی شده محاسبه شد. مدل شرودینگر بالاترین میانگین ارزش‌گذاری و بیشترین انعطاف‌پذیری را نشان داده، در حالی که مدل بلک-شولز نسبت به تغییرات قیمت دارایی پایه و زمان حساسیت کمتری دارد. مدل هستون در این میان رفتاری میانه و قابل پیش‌بینی از خود نشان داده است، به‌گونه‌ای که از نظر انطباق با رفتار بازار، عملکردی بالاتر از مدل بلک-شولز اما پایین‌تر از مدل شرودینگر دارد.

به طور خلاصه، تحلیل بصری و آماری بیانگر آن است که در حالی که مدل بلک-شولز تنها ساختار خطی و ایستای اختیار معامله را نشان می‌دهد و مدل هستون در قالبی نیمه‌پویا رفتار نوسان‌پذیری را لحاظ می‌کند، مدل شرودینگر به‌عنوان یک چارچوب غیرخطی و تطبیقی قادر است رفتار دینامیک‌تری از تغییرات قیمت اختیار در شرایط نوسانی بازار سرمایه ایران ارائه کند. این یافته‌ها پایه‌ای برای درک بهتر تفاوت عملکرد کمی مدل‌ها در بخش مقایسه خطاهای پیش‌بینی خواهند بود.

در این پژوهش هر سه مدل با یکدیگر مقایسه میشوند تا مدلی که بهترین عملکرد را داشته است، مشخص شود. این مقایسه با توجه به مقدار حاصل از جذر میانگین مربعات خطای مربوط به هر مدل و مقدار ضریب تعیین انجام شده است. هرچه جذر میانگین مربعات خطای مربوط به هر مدل کمتر و مقدار ضریب تعیین بیشتر باشد، مدل قابلیت اتکای بیشتری داشته و برای قیمت‌گذاری مناسب‌تر است.

به منظور تاکید بر روی قدرت پیش‌بینی الگوریتم‌های مورد بحث در این پژوهش، مقایسه با خطای درون نمونه ای مدل بلک، شولز و مرتون انجام میشود.

جدول ۲. مقایسه ضریب تعیین

نام مدل	R^2	RMSE
بلک شولز و مرتون	۰.۵۰۹۱	۷۶۷.۲۹۲
هنسون	۰.۶۵۳۷	۶۵.۰۲۹
شرودینگر	۰.۶۸۷۹	۲۶.۹۶۸

همانگونه که در جدول مشخص است، با توجه به مقدار خطاهای به دست آمده از مدل‌های مورد بررسی، مدل شرودینگر کمترین میزان خطا و بیشترین ضریب تعیین و مدل بلک، شولز بیشترین مقدار خطا و کمترین ضریب تعیین را دارد. در تفسیر نتایج میتوان گفت که هر چه میزان خطای پیش‌بینی مدل کمتر باشد، مدل کارا تر بوده و قابلیت اتکای بیشتری دارد. بنابراین با توجه به نتایج حاصل از روش جذر میانگین مربعات خطا، در بین این چهار مدل، مدل شرودینگر بهترین عملکرد را داشته است و مناسب‌ترین مدل برای قیمت‌گذاری اوراق اختیار معامله می‌باشد. پس از آن مدل هستون نزدیکترین نتیجه را به قیمت‌های بازار دارا میباشد و بلک، شولز و مرتون از همه ضعیف‌تر عمل کرده اند. به عبارت دیگر مدل‌های غیر خطی عملکرد بهتری نسبت به مدل‌های خطی در قیمت‌گذاری اوراق اختیار معامله ارائه کرده‌اند.

بحث و نتیجه‌گیری

نتایج حاصل از تحلیل تجربی سه مدل قیمت‌گذاری بلک-شولز، هستون و شرودینگر کوانتوم‌محور در بازار مشتقه ایران، نشان داد که ساختار بازار اختیار معامله کشور، به دلیل ماهیت پرنوسان، ناهمگن و غیرایستا، با مفروضات خطی مدل بلک-شولز سازگاری محدودی دارد. یافته‌های پژوهش بیانگر آن بود که مدل شرودینگر کوانتوم‌محور با حداقل خطای پیش‌بینی ($RMSE = 26.968$) و بالاترین ضریب تعیین ($R^2 = 0.6879$) دقیق‌ترین برآورد را از ارزش اختیار معامله ارائه کرده است، در حالی که مدل هستون در رتبه دوم و مدل بلک-شولز در پایین‌ترین سطح دقت قرار گرفت. این نتایج از منظر نظری و تجربی تأییدکننده روند جهانی گذار از مدل‌های خطی کلاسیک به چارچوب‌های غیرخطی و تطبیقی در تحلیل بازارهای مالی است (Wroblewski & Myśliński, 2022, 2023).

بر اساس تحلیل داده‌های واقعی بازار طی سال‌های ۱۳۹۵ تا ۱۴۰۱، مدل بلک-شولز به دلیل فرض نوسان ثابت و رفتار گاوسی بازده‌ها، در بازه‌های زمانی پرتلاطم، تمایل به بیش‌برآورد قیمت اختیار نسبت به مقادیر واقعی بازار داشت. این نتیجه همسو با یافته‌های پژوهش‌های داخلی است که عملکرد مدل‌های خطی را در بورس اوراق بهادار تهران ناکافی دانسته‌اند (Askarzadeh & Nasiri, 2023; Nabavi Chashmi & Abdollahi, 2018). چنین خطاهایی ناشی از بی‌توجهی مدل کلاسیک به پدیده‌هایی مانند «لبخند نوسان» و «چولگی بازده‌ها» است که در بازارهای نوظهور با رفتارهای ناگهانی قیمت به‌وفور مشاهده می‌شود. بنابراین، ضعف مدل بلک-شولز در بازار ایران نه صرفاً به محدودیت‌های عددی، بلکه به ناسازگاری ساختاری مفروضات آن با واقعیت‌های بازار بازمی‌گردد.

در مقابل، مدل هستون با لحاظ نوسان تصادفی و تعریف فرآیند واریانس پویا، توانست بخشی از رفتار غیرایستای بازار را بازتاب دهد. نتایج نشان داد که میانگین خطای مدل هستون به‌طور معنی‌داری کمتر از بلک-شولز بوده و ضریب تعیین بالاتری دارد. این یافته‌ها با پژوهش (Khalili Iraji, 2016) که کارایی مدل هستون را در ارزش‌گذاری اوراق تبعی در بازار ایران تأیید کرده بود، هم‌راستا است. همچنین، سازگاری نتایج با دیدگاه (Weinan et al., 2019) در خصوص ضرورت لحاظ پویایی تصادفی در تحلیل فرایندهای مالی، نشان می‌دهد که مدل‌های دارای ساختار تصادفی، در مواجهه با داده‌های غیرنرمال و شرایط وابستگی زمانی، بازده دقیق‌تری ارائه می‌کنند.

اما برتری اصلی پژوهش حاضر مربوط به عملکرد مدل شرودینگر کوانتوم‌محور است. این مدل که بر پایه معادله موجی کوانتومی طراحی شده، توانست رفتارهای غیرخطی، هم‌بستگی‌های میان‌دوره‌ای و واکنش‌های تطبیقی بازار را به‌صورت دقیق‌تر شبیه‌سازی کند. وجود جمله غیرخطی β در ساختار مدل، سبب شد که سیستم در برابر انحراف از قیمت واقعی بازار، خود را تنظیم کند و پایداری عددی در شرایط شوک قیمتی افزایش یابد (Wroblewski & Myśliński, 2023). این یافته با نتایج (Wroblewski, 2017) مطابقت دارد که نشان داد مدل شرودینگر در محیط‌های پرتلاطم، نسبت به مدل‌های کلاسیک بلک-شولز از دقت پیش‌بینی به‌مراتب بالاتری برخوردار است.

توضیح نظری این عملکرد برتر را می‌توان در انعطاف‌پذیری ساختار کوانتومی مدل جست‌وجو کرد. برخلاف مدل‌های سنتی که نوسان را به‌عنوان پارامتری ثابت یا تصادفی تعریف می‌کنند، مدل شرودینگر آن را در قالب تابع موجی وابسته به زمان و مکان در نظر می‌گیرد. بدین ترتیب، رفتار بازار نه به‌صورت ایستا، بلکه به شکل دینامیک‌های متقابل میان نوسان، قیمت و نرخ بهره توصیف می‌شود (Vukovic, 2015). در واقع، رویکرد موج‌محور این مدل، توانایی انطباق با چرخه‌های درونی و شوک‌های بیرونی بازار را فراهم می‌سازد و باعث می‌شود که نتایج به شرایط واقعی‌تر نزدیک‌تر باشند.

پژوهش (Kartono et al., 2020) نیز در تأیید این نتیجه نشان داده است که استفاده از معادله شرودینگر غیرخطی و حل عددی آن با روش رانگ-کوتا مرتبه چهارم، موجب افزایش پایداری و کاهش خطای عددی در پیش‌بینی قیمت سهام می‌شود. مشابه این یافته، (Wroblewski & Myśliński, 2022) نیز در چارچوب مدل «بلک-شولز کوانتومی» گزارش کرده است که در حضور نوسانات شدید، مدل‌های مبتنی بر دینامیک کوانتومی، همگرا تر و دقیق‌تر از مدل‌های تصادفی رفتار می‌کنند. این همگرایی سریع و دقت بالا در شبیه‌سازی، در پژوهش حاضر نیز مشاهده شد؛ به‌گونه‌ای که مدل شرودینگر نه‌تنها خطای پیش‌بینی کمتری داشت، بلکه واکنش‌پذیری آن نسبت به تغییر نرخ بهره نیز متعادل‌تر بود.

از سوی دیگر، رویکردهای جدیدی در تحلیل داده‌های مالی مبتنی بر تلفیق نظریه کوانتوم با الگوریتم‌های یادگیری ماشین در حال شکل‌گیری است. پژوهش (Paquet & Soleyman, 2022) نشان داد که شبکه‌های عصبی کوانتومی، با بهره‌گیری از درهم‌تنیدگی و هم‌پوشانی کوانتومی، قادر به یادگیری روابط پیچیده غیرخطی در داده‌های مالی هستند. این یافته از منظر نظری، توضیح می‌دهد که چرا مدل‌های کوانتومی همچون شرودینگر می‌توانند در بازارهای پرنوسان عملکرد بهتری داشته باشند، زیرا اساساً ساختار آن‌ها برای تبیین رفتارهای چندبعدی طراحی شده است.

در همین راستا، نتایج (Vandanapu et al., 2024) در زمینه به‌کارگیری هوش مصنوعی الهام‌گرفته از کوانتوم در معاملات فرکانس بالا، تأکید می‌کند که ترکیب الگوریتم‌های کوانتومی با مدل‌های مالی منجر به کاهش خطا، افزایش سرعت محاسبات و بهبود دقت پیش‌بینی می‌شود. یافته‌های پژوهش حاضر نیز از منظر تجربی مؤید این دیدگاه است؛ زیرا مدل شرودینگر کوانتوم‌محور با برخورداری از ساختار محاسباتی تطبیقی، توانسته است رفتار لحظه‌ای بازار را بهتر از دو مدل دیگر شبیه‌سازی کند.

همچنین، یافته‌های این پژوهش با مطالعات رفتاری نوین در حوزه مالی هم‌راستاست. به‌عنوان نمونه، (Wang & Li, 2024) در بررسی مفهوم «تفکر کوانتومی» در تصمیم‌گیری اقتصادی نشان می‌دهد که پذیرش عدم قطعیت و درک ساختارهای مبهم، می‌تواند به تصمیم‌های سازگارتر در محیط‌های ناپایدار منجر شود. از این منظر، مدل شروودینگر که بر اساس اصل عدم قطعیت و دینامیک احتمالاتی بنا شده، از لحاظ فلسفی نیز با واقعیت روان‌شناختی رفتار بازارها هم‌خوانی دارد. بنابراین، رویکرد کوانتومی نه تنها از نظر ریاضیاتی بلکه از نظر رفتاری نیز سازگارتر با ماهیت نوسانی بازارهای نوظهور است.

از دیدگاه کاربردی، نتایج این پژوهش می‌تواند تأثیر چشمگیری بر راهبردهای پوشش ریسک و توسعه ابزارهای مشتقه در بازار سرمایه ایران داشته باشد. مدل شروودینگر با کاهش خطای قیمت‌گذاری، دقت بیشتری در تعیین ارزش منصفانه قراردادهای اختیار معامله ایجاد می‌کند و از این طریق، ریسک آربیتراژ و نوسانات غیرواقعی قیمت‌ها را کاهش می‌دهد. در بازارهایی مانند بورس تهران، که عمق مالی پایین و عدم تقارن اطلاعاتی بالاست، چنین دقتی می‌تواند به بهبود کارایی کلی بازار منجر شود.

همچنین، نتایج پژوهش نشان داد که حساسیت مدل‌ها نسبت به نرخ بهره بدون ریسک، یکی از عوامل تعیین‌کننده در پایداری عملکرد آنهاست. مدل بلک-شولز به دلیل فرض ثابت بودن نرخ بهره، در واکنش به تغییرات ساختاری اقتصادی ایران ناپایدار عمل کرده است. در حالی که مدل هستون و به‌ویژه شروودینگر، با لحاظ دینامیک‌های تطبیقی، توانستند واکنش‌های منطقی‌تری نسبت به تغییرات نرخ سود ارائه دهند. چنین ویژگی‌ای اهمیت خاصی در بازارهای در حال توسعه دارد که نرخ‌های سود بانکی و سیاست‌های پولی به‌طور مستمر در حال تغییر هستند (Pasupuleti, 2025).

به‌طور کلی، یافته‌های این مطالعه با ادبیات نظری و تجربی موجود در حوزه مدل‌های مالی کوانتومی هم‌سویی دارد. پژوهش‌های (Wroblewski & Myśliński, 2022)، (Vukovic, 2015) و (Kartono et al., 2020) همگی نشان داده‌اند که در بازارهای پرنوسان و ناپایدار، مدل‌های کوانتومی به دلیل ساختار غیرخطی، قدرت انطباق و انعطاف‌پذیری عددی بالاتری دارند. نتایج پژوهش حاضر نیز مؤید همین دیدگاه است و برتری مدل شروودینگر نسبت به دو مدل دیگر، نشان‌دهنده ظرفیت بالقوه رویکردهای کوانتومی برای بهبود دقت پیش‌بینی در محیط‌های مالی نوظهور است.

به لحاظ نظری، می‌توان گفت که گذار از مدل‌های خطی به مدل‌های کوانتومی، نوعی «تحول پارادایمی» در مالی محاسباتی است؛ تحولی که مشابه آن را در سایر حوزه‌ها مانند اقتصاد کلان مبتنی بر هوش مصنوعی (Pasupuleti, 2025) و معاملات خودکار (Vandanapu et al., 2024) نیز مشاهده می‌کنیم. ترکیب روش‌های یادگیری ماشین با نظریه کوانتوم، مسیر جدیدی برای توسعه مدل‌های ترکیبی مالی فراهم کرده است که می‌تواند ساختارهای پیچیده داده را در محیط‌های واقعی و پرنوسان بهتر تحلیل کنند.

از نظر روش‌شناختی، پژوهش حاضر تأیید می‌کند که استفاده از روش‌های عددی پیشرفته نظیر الگوریتم رانگ-کوتا و تکنیک‌های گسسته‌سازی مکانی در حل معادلات شروودینگر مالی، نقش مهمی در دستیابی به نتایج دقیق و پایدار دارد (Kartono et al., 2020). این دستاورد، همسو با دیدگاه (Weinan et al., 2019) در مورد کارایی تحلیل‌های تصادفی عددی در مدل‌سازی فرآیندهای مالی است و نشان می‌دهد که ابزارهای ریاضی نوین می‌توانند مرز میان نظریه و کاربرد را در مهندسی مالی کاهش دهند.

از منظر مقایسه‌ای، مدل شروودینگر در این مطالعه نه تنها از نظر آماری، بلکه از نظر پویایی تطبیقی نیز نسبت به دو مدل دیگر برتری داشت. در شرایط نوسان‌های شدید بازار، این مدل قادر بود خطاهای پیش‌بینی را کاهش داده و در عین حال، روند بازگشت به میانگین را به‌صورت طبیعی بازتولید کند. چنین ویژگی‌هایی در مدل‌های کلاسیک فاقد انعطاف‌پذیری مشاهده نمی‌شود. بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که مدل‌های کوانتومی با رویکرد غیرخطی، گزینه‌ای کارآمدتر برای تحلیل و تصمیم‌گیری در بازارهای مالی ناپایدار هستند (Wroblewski & Myśliński, 2023).

پژوهش حاضر اگرچه از نظر طراحی عددی و مقایسه تجربی از دقت بالایی برخوردار است، اما محدودیت‌هایی دارد که باید در تفسیر نتایج مدنظر قرار گیرد. نخست، عمق کم بازار مشتقه ایران و محدودیت دسترسی به داده‌های پیوسته، می‌تواند بر پایداری نتایج اثر بگذارد. دوم، نوسانات کلان اقتصادی و تغییرات سیاست‌های مالی در دوره مورد مطالعه، ممکن است بخشی از تغییرات خطاهای مدل را توضیح دهد. سوم، پارامترهای کالیبراسیون مدل شروودینگر مانند β به‌صورت تجربی تنظیم شده‌اند و ممکن است در دوره‌های

زمانی دیگر بهینه نباشند. چهارم، با وجود دقت بالای روش‌های عددی، اجرای مدل‌های کوانتومی نیازمند توان محاسباتی بالا است و در شرایط بازارهای واقعی ممکن است محدودیت‌های سخت‌افزاری ایجاد کند.

در تحقیقات آینده پیشنهاد می‌شود که:

۱. داده‌های اختیار معامله در سایر بازارهای منطقه‌ای نظیر ترکیه و هند نیز برای آزمون پایداری مدل شروودینگر استفاده شود.
 ۲. ترکیب مدل شروودینگر با شبکه‌های عصبی کوانتومی و الگوریتم‌های یادگیری عمیق مورد بررسی قرار گیرد تا دقت پیش‌بینی افزایش یابد.
 ۳. نقش متغیرهای کلان اقتصادی همچون تورم، نرخ ارز و نرخ سود در ساختار کوانتومی مدل لحاظ شود.
 ۴. کارایی مدل در ابزارهای مشتقه دیگر مانند اختیار فروش و قراردادهای آتی نیز بررسی شود.
 ۵. توسعه الگوریتم‌های کالیبراسیون خودکار پارامتر β به منظور افزایش پایداری مدل در شرایط واقعی بازار پیشنهاد می‌شود.
- از منظر اجرایی، به کارگیری مدل شروودینگر در سامانه‌های قیمت‌گذاری بورس ایران می‌تواند موجب افزایش دقت تعیین ارزش منصفانه اختیار معامله و کاهش شکاف قیمتی میان بازار و ارزش ذاتی شود. نهادهای مالی می‌توانند از این مدل برای طراحی الگوریتم‌های پوشش ریسک و تحلیل حساسیت استفاده کنند. همچنین، استفاده از رویکردهای کوانتومی در مدل‌سازی مالی می‌تواند راه را برای ادغام تدریجی هوش مصنوعی و محاسبات کوانتومی در بازار سرمایه ایران هموار سازد و سطح کارایی، شفافیت و پایداری تصمیم‌گیری اقتصادی را به طور چشمگیری ارتقا دهد.

مشارکت نویسندگان

در نگارش این مقاله تمامی نویسندگان نقش یکسانی ایفا کردند.

تشکر و قدردانی

از تمامی کسانی که در طی مراحل این پژوهش به ما یاری رساندند تشکر و قدردانی می‌گردد.

تعارض منافع

در انجام مطالعه حاضر، هیچ‌گونه تضاد منافی وجود ندارد.

حمایت مالی

این پژوهش حامی مالی نداشته است.

موازین اخلاقی

در انجام این پژوهش تمامی موازین و اصول اخلاقی رعایت گردیده است.

References

Askarzadeh, G., & Nasiri, K. (2023). A Comparative Analysis of the Efficiency of the Black-Scholes and Binomial Tree Pricing Models in Tehran Stock Exchange Call Option Transactions. *Journal of Financial Engineering and Securities Management*, 54, 25.

- Kartono, A. F. V. W., Wahyudi, S. T., & Irmansyah. (2020). Numerical Solution of Nonlinear Schrödinger Approaches Using the Fourth-Order Runge-Kutta Method for Predicting Stock Pricing. *Journal of Physics: Conference Series*, 1491, 012021. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1491/1/012021>
- Khalili Iraqi, M. (2016). *Pricing Protective Put Options Using the Heston Model* [Master's Thesis, Tehran University of Science and Research].
- Nabavi Chashmi, S. A., & Abdollahi, F. (2018). Investigation and Comparison of the Profit of Asian, European, and American Stock Options in the Tehran Stock Exchange. *9*(34), 359-380.
- Paquet, E., & Soleyman, F. (2022). Quantum Leap: Hybrid quantum neural network for financial predictions. *Expert Systems with Applications*, 195, 116583. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2022.116583>
- Pasupuleti, M. K. (2025). AI in Global Trade and Economics: Predictive Modeling and Quantum-Enhanced Policy Optimization. 46-58. <https://doi.org/10.62311/nesx/77517>
- Vandanapu, M. K., Shaik, A., Nagamalla, S. K., & Balhadruni, R. (2024). Quantum-Inspired AI for Optimized High-Frequency Trading. *International Journal of Finance*, 9(7), 1-17. <https://doi.org/10.47941/ijf.2301>
- Vukovic, O. (2015). On the Interconnectedness of Schrödinger and Black-Scholes Equation. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 3, 1108-1113. <https://doi.org/10.4236/jamp.2015.39137>
- Wang, R., & Li, H. (2024). In the Realm of Uncertainty: Quantum Thinking Promotes Tolerance for Ambiguity. *Psychological Reports*. <https://doi.org/10.1177/00332941241282573>
- Weinan, E., Li, T., & Vanden-Eijden, E. (2019). *Applied Stochastic Analysis*. American Mathematical Society.
- Wroblewski, M. (2017). Nonlinear Schrödinger approach to European option pricing. *Open Physics*, 15, 280-291. <https://doi.org/10.1515/phys-2017-0031>
- Wroblewski, M., & Myśliński, A. (2022). Nonlinear Black-Scholes Option Pricing Model based on Quantum Dynamics. Proceedings of the 7th International Conference on Complexity, Future Information Systems and Risk - COMPLEXIS, <https://doi.org/10.5220/0011066000003197>
- Wroblewski, M., & Myśliński, A. (2023). Quantum Dynamics approach for non-linear Black-Scholes option pricing. <https://doi.org/10.22541/au.167285715.58647436/v1>